9.5 斯托克斯公式、环流量与旋度

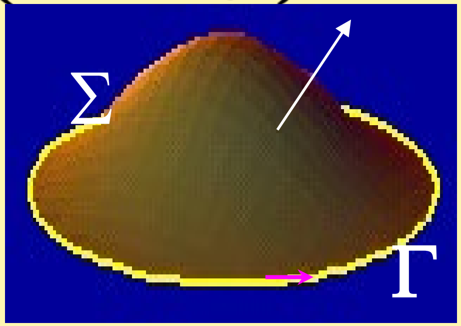
平面闭区域上的二重积分	Green 公式 ⟷	边界曲线上的曲线积分
空间闭区域上的三重积分	Gauss 公式 ⟷	边界闭曲面上的曲面积分
曲面上的曲面积分	Stokes 公式 ⟷	边界曲线上的曲线积分

一、 斯托克斯(Stokes) 公式

定理9.5.1 设Γ是分段光滑有向闭曲线, Σ是以Γ为边界的分片光滑的有向曲面, 且Γ 的正向与Σ的侧符合右手法则, P,Q,R 在包含Σ的一个空间域内具有连续一阶偏导数, 则有

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$



Γ的正向与Σ的侧符合右手法则

或称为Γ是有向曲面Σ的正向边界曲线

右手除拇指外的四个手指依Γ的绕行方向时，拇指所指方向与Σ上的法向量的指向相同

$$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]dS$$

说明：Γ 是有向曲线，Σ是由Γ确定的曲面（依题意选取简单的曲面），Σ的侧可由Γ的的绕行方向和右手法则确定. 格林公式是斯托克斯公式的特殊情况

如果L为xOy平面上的封闭曲线（逆时针），

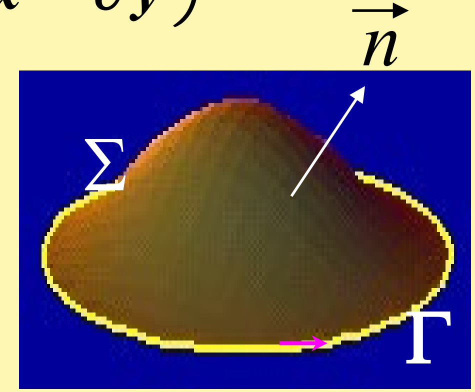
取Σ是xOy平面上L围成的封闭区域，**取上侧** $dz=0$,

$$\oint_{L} P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\iint_{D_{xy}}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

为便于记忆，$\oint_{\Gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$

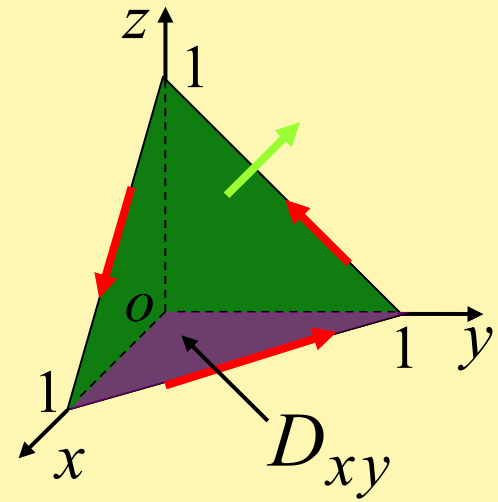
$$=\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$



$$=\iint_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}\mathrm{d}S$$

例1 利用斯托克斯公式计算积分 $\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z$ 其中Γ为平面 $x+y+z=1$ 被三坐标面所截三角形的整个边界，方向如图所示.



解 取三角形域为Σ，并取上侧，则

$$\oint_\Gamma z\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y + y\,\mathrm{d}z = \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ z & x & y \end{vmatrix}$$

$$= \iint_\Sigma \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \iint_{D_{zx}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + \iint_{D_{yz}} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = 3\iint_{D_{xy}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \frac{3}{2}$$

N J U P T

二、 环流量与旋度

斯托克斯公式

$$\iint_{\Sigma}\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

$$=\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$$

设曲面 Σ 的法向量为 $\vec{n}=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$

曲线 Γ的单位切向量为 $\vec{\tau}=(\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu)$

则斯托克斯公式可写为

$$\iint_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma\right]\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{\Gamma}(P\cos\lambda+Q\cos\mu+R\cos\nu)\,\mathrm{d}s$$

$$\iint_{\Sigma}\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}\cdot\{\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma\}\mathrm{d}S$$

$$=\oint_{\Gamma}\{P,Q,R\}\cdot\{\cos\lambda,\cos\mu,\cos\nu\}\mathrm{d}s$$

令 $\vec{A}=(P,Q,R)$，引进一个向量

$$\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}$$

记作 $\mathrm{rot}\,\vec{A}$

向量形式：

$$\iint_{\Sigma}\mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

NJUPT

$$\left\{\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right),\ \left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right),\ \left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\right\}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \underline{\underline{\text{记作}}} \ \operatorname{rot}\vec{A}$$

斯托克斯公式的向量形式 ：

$$\iint_{\Sigma}\operatorname{rot}\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S=\oint_{\Gamma}\vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

定义 $\oint_{\Gamma}P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z$ 称为向量场$\vec{A}$沿有向闭曲线 Γ的环流量。向量 $\operatorname{rot}\vec{A}$称为向量场$\vec{A}$的旋度（rotation）。

斯托克斯公式①的物理意义:

$$\iint_{\Sigma} \mathrm{rot}\,\vec{A}\cdot\vec{n}\,\mathrm{d}S = \oint_{\Gamma} \vec{A}\cdot\vec{\tau}\,\mathrm{d}s$$

向量场 $\vec{A}$ 产生的旋度穿过 Σ 的通量

向量场 $\vec{A}$ 沿 Γ 的环流量

注意Σ与Γ的方向形成右手系!

例2 $u(x,y,z)=xy^2-x^3+\sin(y^2+z^2)$，求rot(grad$u$)。

解 $\mathbf{grad}\,u=(y^2-3x^2)\vec{i}+(2xy+2y\cos(y^2+z^2))\vec{j}$

$$+2z\cos(y^2+z^2)\vec{k}\ =P\vec{i}+Q\vec{j}+R\vec{k}$$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}\,u)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ y^2-3x^2 & 2xy+2y\cos(y^2+z^2) & 2z\cos(y^2+z^2)\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=0\vec{i}+0\vec{j}+0\vec{k}=\vec{0}$$

一般地，设 $u=f(x,y,z)$ 二阶偏导数连续，则 $gradu=(f_x,f_y,f_z)$

$$\mathrm{rot}(\mathrm{grad}u)=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_x & f_y & f_z \end{vmatrix}$$

$$=(f_{zy}-f_{yz})\vec{i}+(f_{xz}-f_{zx})\vec{j}+(f_{yx}-f_{xy})\vec{k}$$

$$=\vec{0}$$

二阶偏导连续的函数 $f(x,y,z)$ 的梯度场是无旋场。

三、汉密尔顿算子

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$$ 教材P38

场论中的三个重要概念

设 $u=u(x,y,z)$, $\vec{A}=(P,Q,R)$, $\nabla=(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y},\frac{\partial}{\partial z})$, 则

梯度: $$\operatorname{grad}u=(\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial u}{\partial z})=\nabla u$$

散度: $$\operatorname{div}\vec{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=\nabla\cdot\vec{A}$$

旋度: $$\operatorname{rot}\vec{A}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}=\nabla\times\vec{A}$$

NJUPT